# MAT1001 Oblig 1

Martin Dørum (martindn)

## Oppgave 1

- $x_n$: studenter som fortsatt studerer MAT1001 i år $n$
- $y_n$: studenter som studerer andre fag enn MAT1001 i år $n$
- $z_n$: studenter som har sluttet å studere i år $n$
- $u_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$
- $u_0 = \begin{bmatrix} 210 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$

### Oppgave 1.a

$M$ er overgangsmatrisen i problemet:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

Studentene som studerer MAT1001 neste år er 20% av de som studerer MAT1001 dette året (fordi 20% stryker), og ingen av de som studerer andre fag eller som har sluttet å studere, fordi en aldri går tilbake til MAT1001 etter å ha blitt ferdig med det.
$x_{n+1} = 0.2x_n + 0y_n + 0z_n$.

Studentene som studerer andre fag enn MAT1001 neste år er 70% av de som studerer MAT1001 dette året, 80% av de som studerer andre fag enn MAT1001 dette året, og 10% av de som har sluttet å studere.
$y_{n+1} = 0.7x_n + 0.8y_n + 0.1z_n$.

Studentene som slutter å studere neste år er 10% av de som tar MAT1001 dette året og 20% av de som tar andre fag enn MAT1001 dette året (siden 80% fortsetter å studere andre fag). 90% av de som har sluttet å studere fortsetter å ikke studere.
$z_{n+1} = 0.1x_n + 0.2y_n + 0.9z_n$.

**Oppgave 1.b**

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 147 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.4 \\ 149.1 \\ 52.5 \end{bmatrix}$$

Etter ett år har 21 sluttet å studere. Etter to år har 53 sluttet å studere.

**Oppgave 1.c**

Karakteristisk ligning:

$\Rightarrow det(M - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow det\left(\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow det\left(\begin{bmatrix} 0.2-\lambda & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.8-\lambda & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$\Rightarrow (0.2 - \lambda)((0.8 - \lambda) * (0.9 - \lambda) - 0.2 * 0.1) - 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow (0.2 - \lambda)(0.7 + (-1.7\lambda) + \lambda^2) = 0$
$\Rightarrow 0.14 + (-0.34\lambda) + 0.2\lambda^2 + (-0.7\lambda) + 1.7\lambda^2 + (-\lambda^3) = 0$
$\Rightarrow 0.14 + (-1.04\lambda) + 1.9\lambda^2 + (-\lambda^3) = 0$
$\Rightarrow \lambda \in \{0.2, 0.7, 1\}$

**Oppgave 1.d**

Egenvektorer (jeg viser bare full utregning for første egenverdi fordi det tar mye plass):

$M\vec{V} = \lambda\vec{V}$

**Egenvektor for $\lambda = 0.2$:**
$\Rightarrow M\vec{V} = 0.2\vec{V}$
$\Rightarrow M\vec{V} = (0.2I)\vec{V}$
$\Rightarrow M\vec{V} = \vec{0} - (0.2I)\vec{V}$
$\Rightarrow (M - 0.2I)\vec{V} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \left( \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 + (0.1 * -7) & 0.6 + (0.2 * -7) & 0.1 + (0.7 * -7) & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & -0.8 & -4.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0.1 & 0.2 + (-0.8 * 0.25) & 0.7 + (-4.8 * 0.25) & 0 \\ 0 & -0.8 & -4.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0.1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.8 & -4.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0.1 * 10 & 0 & -0.5 * 10 & 0 \\ 0 & -0.8 * -1.25 & -4.8 * -1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = -6z \end{cases}$$

Egenvektoren er $\begin{bmatrix} 5z \\ -6z \\ z \end{bmatrix}$.

**Egenvektor for $\lambda = 0.7$:**
$\Rightarrow M\vec{V} = 0.7\vec{V}$
$\Rightarrow (M - 0.7I)\vec{V} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

Egenvektoren er $\begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix}$.

**Egenvektor for $\lambda = 1$:**
$\Rightarrow M\vec{V} = 1\vec{V}$
$\Rightarrow (M - 1I)\vec{V} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0A \\ y = 0.5z \end{cases}$$

Egenvektoren er $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5z \\ z \end{bmatrix}$.

**Oppgave 1.e**

Vi finner tilstandsvektoren i år $n$ slik: $\vec{u}_n = M^n \vec{u}_0$

$M^n = CD^nC^{-1}$
$\Rightarrow$ Vi setter C til en matrise bygget av egenvektorene, og D til en diagonal matrise bygget av egenverdiene:

$$\Rightarrow M^n = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0.7^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{bmatrix} C^{-1}$$

For å finne $C^{-1}$ bruker vi Gauss-Jordan-eliminasjon:

$C^{-1}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.8666\ldots & -0.666\ldots & 0.333\ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0.666\ldots & 0.666\ldots & 0.666\ldots \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ -0.8666\ldots & -0.666\ldots & 0.333\ldots \\ 0.666\ldots & 0.666\ldots & 0.666\ldots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ -2.6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Da får vi:

$$\Rightarrow M^n = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0.7^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{bmatrix} \left( \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ -2.6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow M^n = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2^n * \frac{1}{3}0.6 & 0 & 0 \\ 0.7^n * -\frac{1}{3}2.6 & 0.7^n * -\frac{1}{3}2 & 0.7^n * \frac{1}{3}1 \\ 1^n * \frac{1}{3}2 & 1^n * \frac{1}{3}2 & 1^n * \frac{1}{3}2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^n = \begin{bmatrix} 1 * 0.2^n & 0 & 0 \\ -1.2 * 0.2^n + \frac{1}{3}2.6 * 0.7^n + \frac{1}{3} * 1^n & \frac{2}{3} * 0.7^n + \frac{1}{3} * 1^n & -\frac{1}{3} * 0.7^n + \frac{1}{3} * 1^n \\ \frac{1}{3}0.6 * 0.2^n + -\frac{1}{3}2.6 * 0.7^n + \frac{2}{3} * 1^n & -\frac{2}{3} * 0.7^n + \frac{2}{3} * 1^n & \frac{1}{3} * 0.7^n + \frac{2}{3} * 1^n \end{bmatrix}$$

For å finne $u_n$:

$\vec{u}_n = M^n \vec{u}_0$

$$\Rightarrow \vec{u}_n = \begin{bmatrix} 1 * 0.2^n & 0 & 0 \\ -1.2 * 0.2^n + \frac{1}{3}2.6 * 0.7^n + \frac{1}{3} * 1^n & \frac{2}{3} * 0.7^n + \frac{1}{3} * 1^n & -\frac{1}{3} * 0.7^n + \frac{1}{3} * 1^n \\ \frac{1}{3}0.6 * 0.2^n + -\frac{1}{3}2.6 * 0.7^n + \frac{2}{3} * 1^n & -\frac{2}{3} * 0.7^n + \frac{2}{3} * 1^n & \frac{1}{3} * 0.7^n + \frac{2}{3} * 1^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 210 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_n = \begin{bmatrix} 210 * 0.2^n \\ -252 * 0.2^n + 182 * 0.7^n + 70 \\ 42 * 0.2^n - 182 * 0.7^n + 140 \end{bmatrix}$$

Når $u_n$ går mot uendelig, nermer den seg $\begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 140 \end{bmatrix}$. Dette er fordi alle de andre leddene går mot 0, fordi alle andre ledd enn konstantleddene inneholder $a^n$ hvor $a < 1$, som betyr at de blir nærmere 0 når n blir større. Da sitter vi igjen med bare konstantleddene, som er 0 for x, 70 for y, og 140 for z.

## Oppgave 2

### Oppgave 2.a

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & -a^2 \\ 2a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

$det(M)$
$\Rightarrow 1(1 * a - (-1) * 0) - a(2a * a - 1 * 0) + (-a^2)(2a * (-1) - 1 * 1)$
$\Rightarrow 1(a) - a(2a^2) + (-a^2)(-2a - 1)$
$\Rightarrow a - 2a^3 + 2a^3 + a^2$
$\Rightarrow a + a^2$
$\Rightarrow a(a + 1)$

Determinanten til koeffisientmatrisen er $a(a + 1)$.

**Oppgave 2.b**

Når determinanten er lik 0, har systemet enten uendelig antall løsninger eller ingen løsninger. For $a \in \{0, -1\}$ er ligningen $a(a+1)$ lik 0.

For å finne ut om 0 og -1 gir ingen eller uendelig løsninger tester vi først 0:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 0y - 0^2 z = 1 \\ 2 * 0 * x + y = 1 \\ x - y + 0z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Her ser vi at for $a = 0$ finnes det uendelig antall løsninger, fordi ligningssystemet ikke sier noe om verdien til z.

Test med -1:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + -1y - -1^2 z = 1 \\ 2 * -1 * x + y = 1 \\ x - y + -1z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ -2x + y = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Her ser vi at for $a = -1$ finnes det ingen løsninger, fordi systemet påstår både at $x - y - z = 1$ og at $x - y - z = 0$.

- For $a = 0$ finnes det uendelig antall løsninger.
- For $a = -1$ finnes det ingen løsninger.
- For alle andre verdier av $a$ finnes det nøyaktig en løsning.